УДК 548.0:534

Р. А. Браже, А. И. Кочаев

ОБЩИЙ МЕТОД ПОИСКА ЧИСТЫХ МОД УПРУГИХ ВОЛН В КРИСТАЛЛАХ[1]

Аннотация. Предложен универсальный метод поиска направлений распространения и поляризации чистых мод упругих волн в кристаллах, в общем случае обладающих пьезоэффектом. С этой целью построена математическая модель чистых мод упругих волн, основанная на адиабатических уравнениях состояния произвольной анизотропной пьезоэлектрической среды и уравнении ее движения под воздействием упругих деформаций в произвольной ортогональной системе координат. Для упрощения расчетов разработана компьютерная программа.

Ключевые слова: упругие волны, продольные нормали, поперечные нормали, пьезоэффект.

Abstract. The universal search method for pure modes propagation and polarization in crystals, in general piezoelectrics, is suggested. For the problem's solution the mathematical model of pure modes for elastic waves based on adiabatic state equations for an arbitrary anisotropic medium and its motion equation under the elastic deformations in rotating Cartesian coordinates is constructed. The computer program is prepared to simplify the calculations.

Keywords: elastic waves, longitudinal normals, transverse normals, piezoeffect.

Введение

В произвольном направлении в анизотропной среде могут распространяться (в общем случае) три упругие волны: одна квазипродольная и две квазипоперечные [1]. Практический интерес представляют чистые моды упругих волн, поскольку в них направления волнового и лучевого векторов совпадают. Совокупность одной продольной и двух поперечных чистых мод, распространяющихся вдоль одной прямой, принято называть продольной нормалью. Поперечной нормалью является такое направление, вдоль которого распространяется одна поперечная волна, а две другие являются квазипродольной и квазипоперечной. Метод отыскания продольных нормалей был разработан Ф. Е. Боргнисом [2] в 1955 г., а впоследствии (1965) усовершенствован К. Браггером [3]. Позднее, в 1968 г., З. Р. Чанг [4] представил метод отыскания поперечных нормалей в кристаллах некоторых классов симметрии. Данные методы позволяют правильно отыскивать направления продольных и поперечных нормалей лишь для непьезоэлектрических кристаллов. Поправки для случая пьезоэлектрических кристаллов были сделаны В. Н. Любимовым в 1969 г. [5].

Наконец, Р. А. Браже и др. [6] в 1975 г. предложил общий метод отыскания продольных и поперечных нормалей в кристаллах произвольной симметрии, в том числе пьезоэлектрических, основанный на диагонализации коэффициентов волнового уравнения. Получаемые при этом системы нелинейных уравнений оказались настолько сложны, что средства вычислительной техники того периода не позволили авторам реализовать свой метод в полной мере. В данной работе мы заполняем этот пробел.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-02_97002-р_поволжье_а).

Постановка задачи

Будем рассматривать плоские упругие волны в неограниченной анизотропной непроводящей, в общем случае пьезоэлектрической среде, используя адиабатическое приближение. Предполагаем, что магнитные эффекты отсутствуют, а электромеханические поля являются квазистатическими. Кристалл считается электрически разомкнутым.

В принятых допущениях уравнения состояния пьезоэлектрической среды в произвольной подвижной ортогональной системе координат (x_1', x_2', x_3') можно записать в виде

$$\sigma'_{\alpha\beta} = c_{ijkl} a_{ai} a_{\beta j} a_{\gamma k} a_{\delta l} S'_{\gamma\delta} - e_{mij} a_{\alpha i} a_{\beta j} a_{\varepsilon m} E'_{\varepsilon}\ ; \tag{1}$$

$$D'_{\zeta} = \varepsilon_{mn} a_{\varsigma n} a_{\varepsilon m} E'_{\varepsilon} + e_{nkl} a_{\varsigma n} a_{\gamma k} a_{\delta l} S'_{\gamma\delta}. \tag{2}$$

Здесь $\sigma'_{\alpha\beta}$ и $S'_{\gamma\delta}$ обозначают тензоры упругих натяжений и деформаций; ε_{mn}, e_{nkl} и c_{ijkl} представляют собой тензоры диэлектрических проницаемостей, пьезоконстант и модулей упругости; E'_{ε} и D'_{ζ} являются векторами напряженности и индукции электрического поля соответственно. Символы «*a*» с двумя нижними индексами представляют собой направляющие косинусы подвижной системы координат относительно кристаллофизической системы координат (x_1, x_2, x_3), причем греческие индексы соответствуют подвижным осям, а латинские – кристаллофизическим.

Исключая E'_{ζ} из системы уравнений (1), (2) и подставляя $\sigma'_{\alpha\beta}$ в уравнение упруго деформированной среды

$$\rho \frac{\partial^2 u'_{\alpha}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sigma'_{\alpha\beta}}{\partial x_1'^2}, \tag{3}$$

инвариантное относительно преобразований координат, при условиях $\nabla \cdot \vec{D} = 0$, $\nabla \times \vec{E} = 0$ для плоских упругих волн, распространяющихся в произвольном направлении x_1', получаем следующее волновое уравнение:

$$\rho \frac{\partial^2 u'_{\alpha}}{\partial t^2} = \left(c'_{\alpha 1\gamma 1} + \frac{e'_{1\gamma 1} e'_{1\alpha 1}}{\varepsilon'_{11}} \right) \frac{\partial^2 u'_{\gamma}}{\partial x_1'^2}, \tag{4}$$

где компоненты вектора смещения частиц:

$$u'_{\alpha} = a_{\alpha i} u_i,\ \ u'_{\gamma} = a_{\gamma k} u_k; \tag{5}$$

компоненты тензора модулей упругости:

$$c'_{\alpha 1\gamma 1} = a_{\alpha i} a_{1j} a_{\gamma k} a_{1l} c_{ijkl}; \tag{6}$$

компоненты ранее введенных тензоров диэлектрических проницаемостей и пьезоконстант:

$$\varepsilon'_{11} = a_{1m} a_{1n} \varepsilon_{mn}; \quad (7)$$

$$e'_{1\gamma 1} = a_{1n} a_{\gamma k} a_{1l} e_{nkl}, \quad e'_{1\alpha 1} = a_{1m} a_{\alpha i} a_{1l} e_{mij}. \quad (8)$$

Стоящие в круглых скобках коэффициенты уравнения (4) образуют действительную симметричную матрицу эффективных модулей упругости, в общем случае «ужесточенных» за счет пьезоэффекта. Эта матрица может быть приведена к диагональному или неполному диагональному виду с помощью преобразования подобия с действительной ортогональной преобразующей матрицей, элементами которой являются направляющие косинусы преобразования координат. Обозначив эффективные модули упругости как

$$\overline{c}'_{\alpha 1\gamma 1} = c'_{\alpha 1\gamma 1} + \frac{e'_{1\gamma 1} e'_{1\alpha 1}}{\varepsilon'_{11}}, \quad (9)$$

представим соответствующую матрицу в виде

$$\left[\overline{c}'_{\alpha 1\gamma 1}\right] \equiv \begin{pmatrix} \overline{c}'_{1111} & \overline{c}'_{1121} & \overline{c}'_{1131} \\ \overline{c}'_{2111} & \overline{c}'_{2121} & \overline{c}'_{2131} \\ \overline{c}'_{3111} & \overline{c}'_{3121} & \overline{c}'_{3131} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Элементы матрицы (10) выражаются по формуле, аналогичной (6), через ужесточенные модули упругости $\overline{c}_{ijkl}$ и девять направляющих косинусов: a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, которые связаны между собой соотношениями ортогональности:

$$a_{\alpha i} a_{\beta i} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (11)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ является символом Кронекера.

Так как матрица (10) симметричная, то независимых элементов в ней только шесть. Ввиду их громоздкости они представлены в приложении 1.

Продольные нормали

В случае продольных нормалей ось x'_1 совмещается с направлением распространения и поляризации чисто продольной волны, а оси x'_2 и x'_3 совпадают с направлениями поляризации двух чисто поперечных волн, распространяющихся в том же направлении, что и продольная волна. При этом все недиагональные элементы матрицы (10) обращаются в нуль:

$$\overline{c}'_{1121} = \overline{c}'_{2111} = 0,$$

$$\overline{c}'_{1131} = \overline{c}'_{3111} = 0,$$

$$\overline{c}'_{2131} = \overline{c}'_{3121} = 0. \quad (12)$$

Направление распространения всех трех волн определяется направляющими косинусами a_{11}, a_{12}, a_{13}. Направления поляризации двух чисто поперечных волн определяются направляющими косинусами a_{21}, a_{22}, a_{23} и

a_{31}, a_{32}, a_{33}. Для отыскания a_{11}, a_{12}, a_{13} используем первое уравнение системы (12), взяв его подробную запись из приложения 2, и соотношение ортогональности (11) для α = 1, β = 2:

$$\begin{cases} Aa_{21} + Ba_{22} + Ca_{23} = 0, \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь через *A*, *B* и *C*, зависящие только от a_{11}, a_{12}, a_{13}, обозначены выражения, стоящие в квадратных скобках, в записи $\overline{c}'_{1121}$ из приложения 2. Приравнивая нулю определители из коэффициентов при неизвестных a_{21}, a_{22}, a_{23} системы (13)

$$\begin{vmatrix} A & B \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} B & C \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & C \\ a_{11} & a_{13} \end{vmatrix} = 0,$$

легко получить три уравнения, решение которых дает искомые a_{11}, a_{12}, a_{13}:

$$-a_{11}a_{12}\left[a_{11}^2(\overline{c}_{14} + 2\overline{c}_{56}) + a_{12}^2\overline{c}_{24} + a_{13}^2(3\overline{c}_{34} - 2\overline{c}_{14} - 4\overline{c}_{56})\right] +$$
$$+a_{11}a_{13}\left[a_{11}^2(\overline{c}_{11} - \overline{c}_{13} - 2\overline{c}_{55}) + a_{12}^2(\overline{c}_{12} + \overline{c}_{23} - 2\overline{c}_{44} + 2\overline{c}_{66}) + a_{13}^2(\overline{c}_{13} - \overline{c}_{33} + 2\overline{c}_{55})\right] +$$
$$+a_{12}a_{13}\left[a_{11}^2(3\overline{c}_{16} - 2\overline{c}_{36} - 4\overline{c}_{45}) + a_{12}^2\overline{c}_{26} + a_{13}^2(\overline{c}_{36} + 2\overline{c}_{45})\right] -$$
$$-a_{12}^2(\overline{c}_{25} + 2\overline{c}_{46})(a_{11}^2 - a_{13}^2) - a_{13}^2(3a_{11}^2 - a_{13}^2)\overline{c}_{35} + a_{11}^2(3a_{13}^2 - a_{11}^2)\overline{c}_{15} = 0; \quad (14)$$

$$a_{11}a_{12}\left[a_{11}^2\overline{c}_{15} + a_{12}^2(\overline{c}_{25} + 2\overline{c}_{46}) + a_{13}^2(3\overline{c}_{35} - 2\overline{c}_{25} - 4\overline{c}_{46})\right] -$$
$$-a_{11}a_{13}\left[a_{11}^2\overline{c}_{16} + a_{12}^2(3\overline{c}_{26} - 4\overline{c}_{45} - 2\overline{c}_{36}) + a_{13}^2(\overline{c}_{36} + 2\overline{c}_{45})\right] -$$
$$-a_{12}a_{13}\left[a_{11}^2(\overline{c}_{12} - \overline{c}_{13} - 2\overline{c}_{55} + 2\overline{c}_{66}) + a_{12}^2(\overline{c}_{22} - \overline{c}_{23} - 2\overline{c}_{44}) - a_{13}^2(\overline{c}_{33} - \overline{c}_{23} - 2\overline{c}_{44})\right] +$$
$$+a_{11}^2(\overline{c}_{14} + 2\overline{c}_{56})(a_{12}^2 - a_{13}^2) - a_{12}^2(a_{12}^2 - 3a_{13}^2)\overline{c}_{24} + a_{13}^2(3a_{12}^2 - a_{13}^2)\overline{c}_{34} = 0; \quad (15)$$

$$a_{11}a_{12}\left[a_{11}^2(\overline{c}_{12} + 2\overline{c}_{66} - \overline{c}_{11}) + a_{12}^2(\overline{c}_{22} - \overline{c}_{12} - 2\overline{c}_{66}) + a_{13}^2(\overline{c}_{32} + 2\overline{c}_{44} - \overline{c}_{31} - 2\overline{c}_{55})\right] +$$
$$+a_{11}a_{13}\left[a_{11}^2(\overline{c}_{14} + 2\overline{c}_{56}) + a_{12}^2(3\overline{c}_{24} - 2\overline{c}_{14} - 4\overline{c}_{56}) + a_{13}^2\overline{c}_{34}\right] -$$
$$-a_{12}a_{13}\left[a_{11}^2(3\overline{c}_{15} - 4\overline{c}_{46} - 2\overline{c}_{25}) + a_{12}^2(\overline{c}_{25} + 2\overline{c}_{46}) + a_{13}^2\overline{c}_{35}\right] +$$
$$+a_{11}^2(a_{11}^2 - 3a_{12}^2)\overline{c}_{16} + a_{12}^2(3a_{11}^2 - a_{12}^2)\overline{c}_{26} + a_{13}^2(a_{11}^2 - a_{12}^2)(\overline{c}_{36} + 2\overline{c}_{45}) = 0. \quad (16)$$

Заметим, что использование второго уравнения системы (12) в подробной записи из приложения 1 и соотношения ортогональности (11) для α = 1, β = 3 приводит к такому же результату, так как при этом получаются такие же коэффициенты, что и в (13), но при неизвестных a_{31}, a_{32}, a_{33}.

Такие же уравнения, что и (14)–(16), были получены в [3], но для неужесточенных за счет пьезоэффекта модулей упругости c_{ijkl}. Для учета пьезоэффекта нужно расписать все $\overline{c}_{ijkl}$ в (14)–(16) по формуле

$$\overline{c}_{ijkl} = c_{ijkl} + \frac{a_{1n}a_{1m}e_{mij}e_{nkl}}{a_{1r}a_{1s}\varepsilon_{rs}}. \qquad (17)$$

Для отыскания направлений поляризации x_2' и x_3' распространяющихся наряду с чисто продольной волной двух чисто поперечных волн нужно использовать третье уравнение системы (12) и соотношения ортогональности (11) для α, β = 2; α, β = 3; α = 2, β = 1; α = 3, β = 1; α = 2, β = 3:

$$\begin{cases} \overline{c}'_{2131} = 0, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} + a_{23}a_{13} = 0, \\ a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0, \\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0, \end{cases} \qquad (18)$$

где выражение для $\overline{c}'_{2131}$ берется из приложения 1. Решение системы (18) из шести уравнений дает направляющие косинусы направлений поляризации поперечных волн: a_{21}, a_{22}, a_{23} и a_{31}, a_{32}, a_{33}.

Скорости всех чистых мод упругих волн, распространяющихся вдоль продольных нормалей, легко получить подстановкой найденных направляющих косинусов в диагональные элементы матрицы (10), расписав их по соответствующим формулам из приложения 1 с использованием (17) и вычисляя по формуле

$$v_\alpha = \left(\frac{\overline{c}'_{\alpha1\alpha1}}{\rho}\right)^{1/2}. \qquad (19)$$

Здесь α = 1 для чисто продольной волны и α = 2, 3 для сонаправленных с ней двух чисто поперечных волн.

Упругие волны, сопровождаемые продольными пьезоэлектрическими полями, называются пьезоактивными. Из рассмотренных выше чистых мод упругих волн пьезоактивными будут те, для которых эффективный модуль упругости ужесточается. Величина этого ужесточения определяется коэффициентом электромеханической связи

$$k_\alpha = \left(1 - \frac{c'_{\alpha1\alpha1}}{\overline{c}'_{\alpha1\alpha1}}\right)^{1/2}, \qquad (20)$$

где $c'_{\alpha1\alpha1}$ есть соответствующий неужесточенный модуль упругости, для получения которого следует в $\overline{c}'_{\alpha1\alpha1}$ положить все пьезоэлектрические константы равными нулю.

Поперечные нормали

Для отыскания поперечных нормалей следует заметить, что найденные выше направления поляризации x_2', x_3' двух чисто поперечных волн, распространяющихся вдоль продольных нормалей, были обозначены нами так условно. С равным успехом мы могли бы поменять эти обозначения местами. Поэтому, взяв за основу одно из них, например x_3', мы можем найти перпендикулярную этой оси плоскость, в которой лежат направления распространения всех чисто поперечных волн, имеющих поляризацию x_3'. И лишь в некоторых направлениях в этой плоскости, совпадающих с продольными нормалями, все три упругие волны будут образовывать чистые моды. Перебирая все найденные в предыдущем разделе направления поляризации чисто поперечных мод, определяемые направляющими косинусами a_{31}, a_{32}, a_{33}, мы можем найти их направления распространения, определяемые направляющими косинусами a_{11}, a_{12}, a_{13} из соотношений ортогональности (11) для α, β = 1; α = 3, β = 1:

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1, \\ a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Отметим, что, определив направление поляризации чисто поперечной волны как x_2', мы получили бы те же самые a_{11}, a_{12}, a_{13} из соотношений ортогональности для α, β = 1; α = 2, β = 1.

Оптимизация вычислений посредством применения компьютерной программы

С вычислительной точки зрения задача отыскания направляющих косинусов продольных и поперечных нормалей в кристалле затруднена решением системы нелинейных уравнений (14)–(16). Поэтому нами разработана компьютерная программа, использующая пакет Maple 9.5 в операционной системе Windows XP, решающая весь круг перечисленных выше вопросов. Для получения исчерпывающих сведений об особенностях распространения упругих волн в конкретном пьезоэлектрическом кристалле пользователю нужно лишь ввести табличные значения плотности среды и компонентов тензоров модулей упругости, пьезомодулей и диэлектрических проницаемостей.

В приложении 2 приведены примеры использования разработанной программы для отыскания чисто продольных мод в непьезоэлектрическом кристалле сапфира (α-Al_2O_3), принадлежащего к классу симметрии $\bar{3}m$ тригональной сингонии (табл. 2.1), и в пьезоэлектрическом кристалле ниобата лития ($LiNbO_3$) из класса симметрии $3m$ той же сингонии (табл. 2.2). Все необходимые константы взяты из [7]. Параллельно для той же цели был использован метод Браггера. Как и следовало ожидать, для непьезоэлектрического кристалла сапфира результаты обоих методов совпали. Игнорирование пьезоэффекта в случае пьезоэлектрического кристалла ниобата лития в методе Браггера дало не только другие значения скоростей трех упругих волн, но и совершенно другое количество продольных нормалей (табл. 2.3). Применение ужесточающих поправок к модулям упругости для простых (осевых) направлений продольных нормалей можно произвести, руководствуясь соображениями, изложенными в [5]. Однако разработанная нами программа делает это автоматически для чистых мод упругих волн любого, в том числе и не осевого, направления распространения.

Заключение

Проблема поиска чистых мод упругих волн в пьезоэлектрических кристаллах, по сравнению с той же задачей в непьезоэлектрических кристаллах, осложняется зависимостью как самих направлений распространения таких волновых мод, так и их количества не только от класса симметрии кристалла, но и от величин упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических констант. Предложенная нами математическая модель, основанная на методе диагонализации элементов матрицы эффективных модулей упругости, приводит хотя и к довольно громоздким нелинейным уравнениям, но все же доступным к решению на персональном компьютере. Разработанная нами программа позволяет дать полное описание акустических свойств любого непроводящего кристалла, в том числе пьезоэлектрического, если известны его симметрия и соответствующие физические константы.

Список литературы

1. **Christoffel, E. B.** Ueber die Fortpflanzung von Stössen durch elastische feste Körper / E. B. Christoffel // Ann. di matematica pura ed applicata(2). – 1877. – V. 8. – P. 193–243.
2. **Borgnis, F. E.** Specific direction of longitudinal wave propagation in anisotropic media / F. E. Borgnis // Phys. Rev. – 1955. – V. 98. – P. 1000–1005.
3. **Brugger, K.** Pure modes for elastic waves in crystals / K. Brugger // J. Appl. Phys. – 1965. – V. 36. – № 3. – Part 1. – P. 759–768.
4. **Chang, Z. P.** Pure transverse modes for elastic waves in crystals / Z. P. Chang // J. Appl. Phys. – 1968. – V. 39. – № 12. – P. 5669–5681.
5. **Любимов, В. Н.** Учет пьезоэффекта в теории упругих волн для кристаллов различной симметрии / В. Н. Любимов // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 186. – № 5. – С. 1055-1058.
6. **Браже, Р. А.** Эффективность дифракции света на чистых модах упругих волн / Р. А. Браже, М. А. Григорьев, В. Н. Наянов // ФТТ. – 1975. – Т. 17. – № 3. – С. 886–895.
7. **Блистанов, А. А.** Акустические кристаллы / А. А. Блистанов, В. С. Бондаренко, Н. В. Переломова, Ф. Н. Стрижевская, В. В. Чкалова, М. П. Шаскольская. – М. : Наука, 1982. – 632 с.

Приложение 1

Ненулевые элементы матрицы $[\bar{c}'_{\alpha 1\gamma 1}]$

$$\bar{c}'_{1111} = a_{11}\Big[a_{11}^3\bar{c}_{11} + a_{12}^3\bar{c}_{23} + a_{13}^3\bar{c}_{35} + 3a_{11}^2 a_{12}\bar{c}_{16} + 3a_{11}^2 a_{13}\bar{c}_{15} + a_{12}^2 a_{11}(\bar{c}_{12} + 2\bar{c}_{66}) +$$

$$+a_{11}a_{12}a_{13}(4\bar{c}_{56} + 2\bar{c}_{14}) + a_{13}^2 a_{11}(\bar{c}_{31} + 2\bar{c}_{55}) + a_{12}^2 a_{13}(\bar{c}_{25} + 2\bar{c}_{46}) +$$

$$+a_{13}^2 a_{12}(\bar{c}_{36} + 2\bar{c}_{45})\Big] + a_{12}\Big[a_{11}^3\bar{c}_{16} + a_{12}^3\bar{c}_{22} + a_{13}^3\bar{c}_{34} + a_{11}^2 a_{12}(\bar{c}_{12} + 2\bar{c}_{66}) +$$

$$+a_{11}^2 a_{13}(\bar{c}_{14} + 2\bar{c}_{56}) + 3a_{12}^2 a_{11}\bar{c}_{26}) + a_{11}a_{12}a_{13}(4\bar{c}_{46} + 2\bar{c}_{25}) + a_{13}^2 a_{11}(\bar{c}_{36} + 2\bar{c}_{45}) +$$

$$+3a_{12}^2 a_{13}\bar{c}_{24} + a_{13}^2 a_{12}(\bar{c}_{32} + 2\bar{c}_{44})\Big] + a_{13}\Big[a_{11}^3\bar{c}_{15} + a_{12}^3\bar{c}_{24} + a_{13}^3\bar{c}_{33} +$$

$$+a_{11}^2 a_{12}(\bar{c}_{14} + 2\bar{c}_{56}) + a_{11}^2 a_{13}(\bar{c}_{13} + 2\bar{c}_{55}) + a_{12}^2 a_{11}(\bar{c}_{25} + 2\bar{c}_{46}) +$$

$$+a_{11}a_{12}a_{13}(4\bar{c}_{45} + 2\bar{c}_{36}) + 3a_{13}^2 a_{11}\bar{c}_{35} + a_{12}^2 a_{13}(\bar{c}_{23} + 2\bar{c}_{44}) + 3a_{13}^2 a_{12}\bar{c}_{34}\Big];$$

$$\bar{c}'_{1121} = \bar{c}'_{2111} = a_{21}\Big[a_{11}^3\bar{c}_{11} + a_{12}^3\bar{c}_{23} + a_{13}^3\bar{c}_{35} + 3a_{11}^2 a_{12}\bar{c}_{16} + 3a_{11}^2 a_{13}\bar{c}_{15} +$$

$$+a_{12}^2 a_{11}(\bar{c}_{12} + 2\bar{c}_{66}) + a_{11}a_{12}a_{13}(4\bar{c}_{56} + 2\bar{c}_{14}) + a_{13}^2 a_{11}(\bar{c}_{31} + 2\bar{c}_{55}) +$$

$$+a_{12}^2 a_{13}(\bar{c}_{25} + 2\bar{c}_{46}) + a_{13}^2 a_{12}(\bar{c}_{36} + 2\bar{c}_{45})\Big] + a_{22}\Big[a_{11}^3\bar{c}_{16} + a_{12}^3\bar{c}_{22} +$$

$$+a_{13}^3\bar{c}_{34} + a_{11}^2 a_{12}(\bar{c}_{12} + 2\bar{c}_{66}) + a_{11}^2 a_{13}(\bar{c}_{14} + 2\bar{c}_{56}) + 3a_{12}^2 a_{11}\bar{c}_{26}) +$$

$$+a_{11}a_{12}a_{13}(4\bar{c}_{46} + 2\bar{c}_{25}) + a_{13}^2 a_{11}(\bar{c}_{36} + 2\bar{c}_{45}) + 3a_{12}^2 a_{13}\bar{c}_{24} +$$

$$+a_{13}^2 a_{12}(\bar{c}_{32} + 2\bar{c}_{44})\Big] + a_{23}\Big[a_{11}^3\bar{c}_{15} + a_{12}^3\bar{c}_{24} + a_{13}^3\bar{c}_{33} +$$

$$+a_{11}^2 a_{12}(\bar{c}_{14} + 2\bar{c}_{56}) + a_{11}^2 a_{13}(\bar{c}_{13} + 2\bar{c}_{55}) + a_{12}^2 a_{11}(\bar{c}_{25} + 2\bar{c}_{46}) +$$

$$+a_{11}a_{12}a_{13}(4\bar{c}_{45} + 2\bar{c}_{36}) + 3a_{13}^2 a_{11}\bar{c}_{35} + a_{12}^2 a_{13}(\bar{c}_{23} + 2\bar{c}_{44}) + 3a_{13}^2 a_{12}\bar{c}_{34}\Big];$$

$$\bar{c}'_{1131} = \bar{c}'_{3111} = a_{31}\Big[a_{11}^3\bar{c}_{11} + a_{12}^3\bar{c}_{23} + a_{13}^3\bar{c}_{35} + 3a_{11}^2 a_{12}\bar{c}_{16} + 3a_{11}^2 a_{13}\bar{c}_{15} +$$

$$+a_{12}^2 a_{11}(\bar{c}_{12} + 2\bar{c}_{66}) + a_{11}a_{12}a_{13}(4\bar{c}_{56} + 2\bar{c}_{14}) + a_{13}^2 a_{11}(\bar{c}_{31} + 2\bar{c}_{55}) +$$

$$+a_{12}^2 a_{13}(\bar{c}_{25} + 2\bar{c}_{46}) + a_{13}^2 a_{12}(\bar{c}_{36} + 2\bar{c}_{45})\Big] + a_{32}\Big[a_{11}^3\bar{c}_{16} + a_{12}^3\bar{c}_{22} +$$

$$+a_{13}^3\bar{c}_{34} + a_{11}^2 a_{12}(\bar{c}_{12} + 2\bar{c}_{66}) + a_{11}^2 a_{13}(\bar{c}_{14} + 2\bar{c}_{56}) + 3a_{12}^2 a_{11}\bar{c}_{26}) +$$

$$+a_{11}a_{12}a_{13}(4\bar{c}_{46} + 2\bar{c}_{25}) + a_{13}^2 a_{11}(\bar{c}_{36} + 2\bar{c}_{45}) + 3a_{12}^2 a_{13}\bar{c}_{24} +$$

$$+a_{13}^2 a_{12}(\bar{c}_{32} + 2\bar{c}_{44})\Big] + a_{33}\Big[a_{11}^3\bar{c}_{15} + a_{12}^3\bar{c}_{24} + a_{13}^3\bar{c}_{33} +$$

$$+a_{11}^2 a_{12}(\bar{c}_{14} + 2\bar{c}_{56}) + a_{11}^2 a_{13}(\bar{c}_{13} + 2\bar{c}_{55}) + a_{12}^2 a_{11}(\bar{c}_{25} + 2\bar{c}_{46}) +$$

$$+a_{11}a_{12}a_{13}(4\bar{c}_{45} + 2\bar{c}_{36}) + 3a_{13}^2 a_{11}\bar{c}_{35} + a_{12}^2 a_{13}(\bar{c}_{23} + 2\bar{c}_{44}) + 3a_{13}^2 a_{12}\bar{c}_{34}\Big];$$

$$\bar{c}'_{2121} = a_{21}^2\Big[a_{11}^2\bar{c}_{11} + a_{12}^2\bar{c}_{66} + a_{13}^2\bar{c}_{55} + 2a_{11}a_{12}\bar{c}_{16} + 2a_{11}a_{13}\bar{c}_{15} + 2a_{12}a_{13}\bar{c}_{56}\Big]$$

$$+a_{22}^2\Big[a_{11}^2\bar{c}_{66} + a_{12}^2\bar{c}_{22} + a_{13}^2\bar{c}_{44} + 2a_{11}a_{12}\bar{c}_{26} + 2a_{11}a_{13}\bar{c}_{46} + 2a_{12}a_{13}\bar{c}_{24}\Big] +$$

$$+a_{23}^2\Big[a_{11}^2\bar{c}_{55} + a_{12}^2\bar{c}_{44} + a_{13}^2\bar{c}_{33} + 2a_{11}a_{12}\bar{c}_{45} + 2a_{11}a_{13}\bar{c}_{35} + 2a_{12}a_{13}\bar{c}_{34}\Big] +$$

$$+2a_{21}a_{22}\Big[a_{11}^2\bar{c}_{16} + a_{12}^2\bar{c}_{26} + a_{13}^2\bar{c}_{45} + a_{11}a_{12}(\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66}) + a_{11}a_{13}(\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}) +$$

$$+a_{12}a_{13}(\bar{c}_{25} + \bar{c}_{46})\Big] + 2a_{21}a_{23}\Big[a_{11}^2\bar{c}_{15} + a_{12}^2\bar{c}_{46} + a_{13}^2\bar{c}_{35} + a_{11}a_{12}(\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}) +$$

$$+a_{11}a_{13}(\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}) + a_{12}a_{13}(\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45})\Big] + 2a_{22}a_{23}\Big[a_{11}^2\bar{c}_{56} + a_{12}^2\bar{c}_{24} + a_{13}^2\bar{c}_{34} +$$

$$+a_{11}a_{12}(\bar{c}_{25} + \bar{c}_{46}) + a_{11}a_{13}(\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45}) + a_{12}a_{13}(\bar{c}_{23} + \bar{c}_{44})\Big];$$

$$\bar{c}'_{2131} = \bar{c}'_{3121} = a_{21}a_{31}\Big[a_{11}^2\bar{c}_{11} + a_{12}^2\bar{c}_{66} + a_{13}^2\bar{c}_{55} + 2a_{11}a_{12}\bar{c}_{16} + 2a_{11}a_{13}\bar{c}_{15} +$$

$$+2a_{12}a_{13}\bar{c}_{56}\Big] + a_{21}a_{32}\Big[a_{11}^2\bar{c}_{16} + a_{12}^2\bar{c}_{26} + a_{13}^2\bar{c}_{45} + a_{11}a_{12}(\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66}) +$$

$$+a_{11}a_{13}(\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}) + a_{12}a_{13}(\bar{c}_{25} + \bar{c}_{46})\Big] + a_{21}a_{33}\Big[a_{11}^2\bar{c}_{15} + a_{12}^2\bar{c}_{46} + a_{13}^2\bar{c}_{35} +$$

$$+a_{11}a_{12}(\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}) + a_{11}a_{13}(\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}) + a_{12}a_{13}(\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45})\Big] + a_{22}a_{31}\Big[a_{11}^2\bar{c}_{16} +$$

$$+a_{12}^2\bar{c}_{26} + a_{13}^2\bar{c}_{45} + a_{11}a_{12}(\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66}) + a_{11}a_{13}(\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}) + a_{12}a_{13}(\bar{c}_{25} + \bar{c}_{46})\Big] +$$

$$+a_{22}a_{32}\Big[a_{11}^2\bar{c}_{66} + a_{12}^2\bar{c}_{22} + a_{13}^2\bar{c}_{44} + 2a_{11}a_{12}\bar{c}_{26} + 2a_{11}a_{13}\bar{c}_{46} +$$

$$+2a_{12}a_{13}\bar{c}_{24}\Big] + a_{22}a_{33}\Big[a_{11}^2\bar{c}_{56} + a_{12}^2\bar{c}_{24} + a_{13}^2\bar{c}_{34} + a_{11}a_{12}(\bar{c}_{25} + \bar{c}_{46}) +$$

$$+a_{11}a_{13}(\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45}) + a_{12}a_{13}(\bar{c}_{23} + \bar{c}_{44})\Big] + a_{23}a_{31}\Big[a_{11}^2\bar{c}_{15} + a_{12}^2\bar{c}_{46} + a_{13}^2\bar{c}_{35} +$$

$$+a_{11}a_{12}(\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}) + a_{11}a_{13}(\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}) + a_{12}a_{13}(\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45})\Big] + a_{23}a_{32}\Big[a_{11}^2\bar{c}_{56} +$$

$$+a_{12}^2\bar{c}_{24} + a_{13}^2\bar{c}_{34} + a_{11}a_{12}(\bar{c}_{25} + \bar{c}_{46}) + a_{11}a_{13}(\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45}) + a_{12}a_{13}(\bar{c}_{23} + \bar{c}_{44})\Big] +$$

$$+a_{23}a_{33}\Big[a_{11}^2\bar{c}_{55} + a_{12}^2\bar{c}_{44} + a_{13}^2\bar{c}_{33} + 2a_{11}a_{12}\bar{c}_{45} + 2a_{11}a_{13}\bar{c}_{35} + 2a_{12}a_{13}\bar{c}_{34}\Big];$$

$$\bar{c}'_{3131} = a_{31}^2\Big[a_{11}^2\bar{c}_{11} + a_{12}^2\bar{c}_{66} + a_{13}^2\bar{c}_{55} + 2a_{11}a_{12}\bar{c}_{16} + 2a_{11}a_{13}\bar{c}_{15} + 2a_{12}a_{13}\bar{c}_{56}\Big] +$$

$$+a_{32}^2\Big[a_{11}^2\bar{c}_{66} + a_{12}^2\bar{c}_{22} + a_{13}^2\bar{c}_{44} + 2a_{11}a_{12}\bar{c}_{26} + 2a_{11}a_{13}\bar{c}_{46} + 2a_{12}a_{13}\bar{c}_{24}\Big] +$$

$$+a_{33}^2\Big[a_{11}^2\bar{c}_{55} + a_{12}^2\bar{c}_{44} + a_{13}^2\bar{c}_{33} + 2a_{11}a_{12}\bar{c}_{45} + 2a_{11}a_{13}\bar{c}_{35} + 2a_{12}a_{13}\bar{c}_{34}\Big] +$$

$$+2a_{31}a_{32}\Big[a_{11}^2\bar{c}_{16} + a_{12}^2\bar{c}_{26} + a_{13}^2\bar{c}_{45} + a_{11}a_{12}(\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66}) + a_{11}a_{13}(\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}) +$$

$$+a_{12}a_{13}(\bar{c}_{25} + \bar{c}_{46})\Big] + 2a_{31}a_{33}\Big[a_{11}^2\bar{c}_{15} + a_{12}^2\bar{c}_{46} + a_{13}^2\bar{c}_{35} + a_{11}a_{12}(\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}) +$$

$$+a_{11}a_{13}(\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}) + a_{12}a_{13}(\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45})\Big] + 2a_{32}a_{33}\Big[a_{11}^2\bar{c}_{56} + a_{12}^2\bar{c}_{24} + a_{13}^2\bar{c}_{34} +$$

$$+a_{11}a_{12}(\bar{c}_{25} + \bar{c}_{46}) + a_{11}a_{13}(\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45}) + a_{12}a_{13}(\bar{c}_{23} + \bar{c}_{44})\Big].$$

Приложение 2

Упругие и электромеханические свойства продольных нормалей

Таблица 2.1

Сапфир (α-Al_2O_3). Вычисления, выполненные с помощью разработанной программы и метода Браггера

Срез	Направление распространения	Смещение частиц	Тип волны	Скорость v, 10^3 м/с
1	2	3	4	5
x_3	(0, 0 ,1)	(0, 0, 1) (1, 0 ,0) (0, 1, 0)	L T_2 T_3	11.19 6.09 6.09

Окончание табл. 2.1

1	2	3	4	5
x_1	(1, 0, 0)	(1, 0, 0) (0, 0.831, –0.558) (0, 0.558, 0.831)	L T_2 T_3	11.17 5.91 6.63
x_2+86°	(0, 0.064, 0.998)	(0, 0.064, 0.998) (0, –0.998, 0.064) (1, 0, 0)	L T_2 T_3	11.29 6.08 6.25
x_2+23°	(0, 0.922, 0.386)	(0, 0.922, 0.386) (0, 0.386, –0.922) (1, 0, 0)	L T_2 T_3	10.33 7.11 6.70
x_2–38°	(0, 0.789, -0.614)	(0, 0.789, –0.614) (0, 0.614, 0.789) (1, 0, 0)	L T_2 T_3	10.88 6.98 5.75
x_1+30°	(0.500, 0.866, 0)	(0.500, 0.866, 0) (–0.514, 0.297, –0.805) (–0.697, 0.402, 0.593)	L T_2 T_3	11.19 5.91 6.64

Таблица 2.2

Ниобат лития ($LiNbo_3$). Вычисления, выполненные
с помощью разработанной программы (с учетом пьезоэффекта)

Срез	Направление распространения	Смещение частиц	Тип волны	Скорость v, 10^3 м/с	Коэффициент электро-механической связи k_α
x_3	(0, 0 ,1)	(0, 0, 1) (1, 0 ,0) (0, 1, 0)	L T_2 T_3	7.32 3.58 3.58	0.16 – –
x_1	(1, 0, 0)	(1, 0, 0) (0, 0.755, 0.656) (0, –0.656, 0.755)	L T_2 T_3	6.57 4.08 4.80	– 0.10 0.68
x_2+22°	(0, 0.923, 0.386)	(0, 0.923, 0.386) (0, –0.386, 0.923) (1, 0, 0)	L T_2 T_3	6.70 3.85 4.52	0.10 0.09 0.57

Таблица 2.3

Ниобат лития ($LiNbo_3$). Вычисления, выполненные
с помощью метода Браггера (без учета пьезоэффекта)

Срез	Направление распространения	Смещение частиц	Тип волны	Скорость v, 10^3 м/с	Коэффициент электро-механической связи k_α
1	2	3	4	5	6
x_3	(0, 0 ,1)	(0, 0, 1) (1, 0 ,0) (0, 1, 0)	L T_2 T_3	7.16 3.58 3.58	– – –
x_1	(1, 0, 0)	(1, 0, 0) (0, 0.425, –0.905) (0, 0.905, 0.425)	L T_2 T_3	6.56 3.49 4.04	– – –

Окончание табл. 2.3

1	2	3	4	5	6
x_2–62°	(0, 0.467, -0.884)	(0, 0.467, -0.884)	L	6.90	–
		(0, 0.884, 0.467)	T_2	3.98	–
		(1, 0, 0)	T_3	3.49	–
x_1+30°	(0.500, 0.866, 0)	(0.500, 0.866, 0)	L	6.56	–
		(–0.719, 0.415, 0.558)	T_2	3.64	–
		(0.483, -0.279, 0.830)	T_3	3.90	–

Браже Рудольф Александрович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики, Ульяновский государственный технический университет

E-mail: brazhe@ulstu.ru

Brazhe Rudolf Alexandrovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of physics, Ulyanovsk State Technical University

Кочаев Алексей Иванович
аспирант, Ульяновский государственный технический университет

E-mail: a.kochaev@ulstu.ru

Kochaev Alexey Ivanovich
Postgraduate student, Ulyanovsk State Technical University

УДК 548.0:534

Браже, Р. А.

Общий метод поиска чистых мод упругих волн в кристаллах / Р. А. Браже, А. И. Кочаев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 3 (15). – С. 115–125.